__Presentazione del risultato della misurazione, definizione intuitiva di incertezza di misura__

Il risultato di una misurazione consta di tre elementi, ugualmente importanti: il valore di misura, l'unità di misura, e l'incertezza di misura. Il valore di misura fornisce un dato quantitativo, che assume significato una volta specificata l'unità di misura con cui rapportarla. L'incertezza di misura ha un significato non meno importante, in quanto esprime la quantità di informazione che è effettivamente associata al risultato della misurazione. In particolare, l'incertezza di misura definisce l'entità dello scostamento possibile tra il risultato della misurazione e il valore effettivo del misurando, e può essere legata intuitivamente come semi-ampiezza di un intervallo. In altri termini, l'incertezza di misura consente di definire un intervallo di fiducia, cioè un intervallo, centrato sul valore di misura e schematizzato in Fig. 1, a cui si ritiene potrebbe appartenere il valore effettivo con una certa probabilità, detta grado di fiducia. L'ampiezza dell'intervallo di fiducia aumenta con il ridursi della quantità di informazione associata al risultato della misurazione, e viceversa. Il caso limite di una incertezza di misura nulla equivale ad avere la massima quantità di informazione possibile, in quanto il valore effettivo è esattamente quello misurato. Per contro, il caso limite duale di incertezza tendente all'infinito corrisponde a non avere acquisito alcuna informazione mediante la misurazione, perché il tendere all'infinito dell'incertezza corrisponde al tendere all'infinito della ampiezza dell'intervallo di fiducia, il che implica che, indipendentemente dal valore di misura, il valore effettivo potrebbe essere uno qualunque! In effetti, per quanto ne sa l'operatore, prima della misurazione il misurando potrebbe avere un valore qualunque. Dal momento che a valle della misurazione si raggiunge la stessa conclusione, ne segue

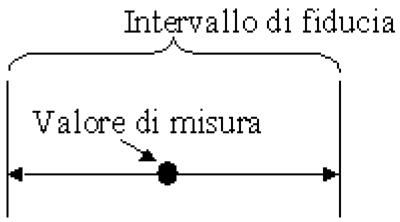

Fig. 1: risultato di misura e intervallo di fiducia

che la misurazione a incertezza infinita non ha apparentemente portato alcuna informazione aggiuntiva, risultando completamente inutile.

L'incertezza di misura è ineliminabile in un contesto reale, in quanto qualunque strumento di misura opera sul misurando mediante un qualche tipo di scambio energetico, e quindi lo altera. Ad esempio, un termometro a mercurio immerso in un recipiente contenente un fluido più freddo cede calore al fluido, e quindi misurerà una temperatura più alta di quella che aveva effettivamente il misurando. Tuttavia, non solo non è necessario effettuare misurazioni a incertezza nulla, ma l'incertezza stessa a meno della quale si vuole conoscere un dato parametro, detta *incertezza target* o *incertezza obiettivo* (simbolo: $u_{UB}(\cdot)$), è definita di volta in volta sulla base di specifiche applicazioni. Ad esempio, le dimensioni delle pareti di una stanza devono essere controllate (e quindi misurate) a meno del millimetro, mentre le dimensioni dei componenti di un orologio da polso o di un sistema meccanico di precisione possono richiedere accuratezze dell'ordine del micron. Di conseguenza, in un contesto pratico, occorrerà selezionare il sistema e la procedura di misura sulla base dei requisiti di incertezza, espressi dal committente della misurazione attraverso l'incertezza obiettivo.

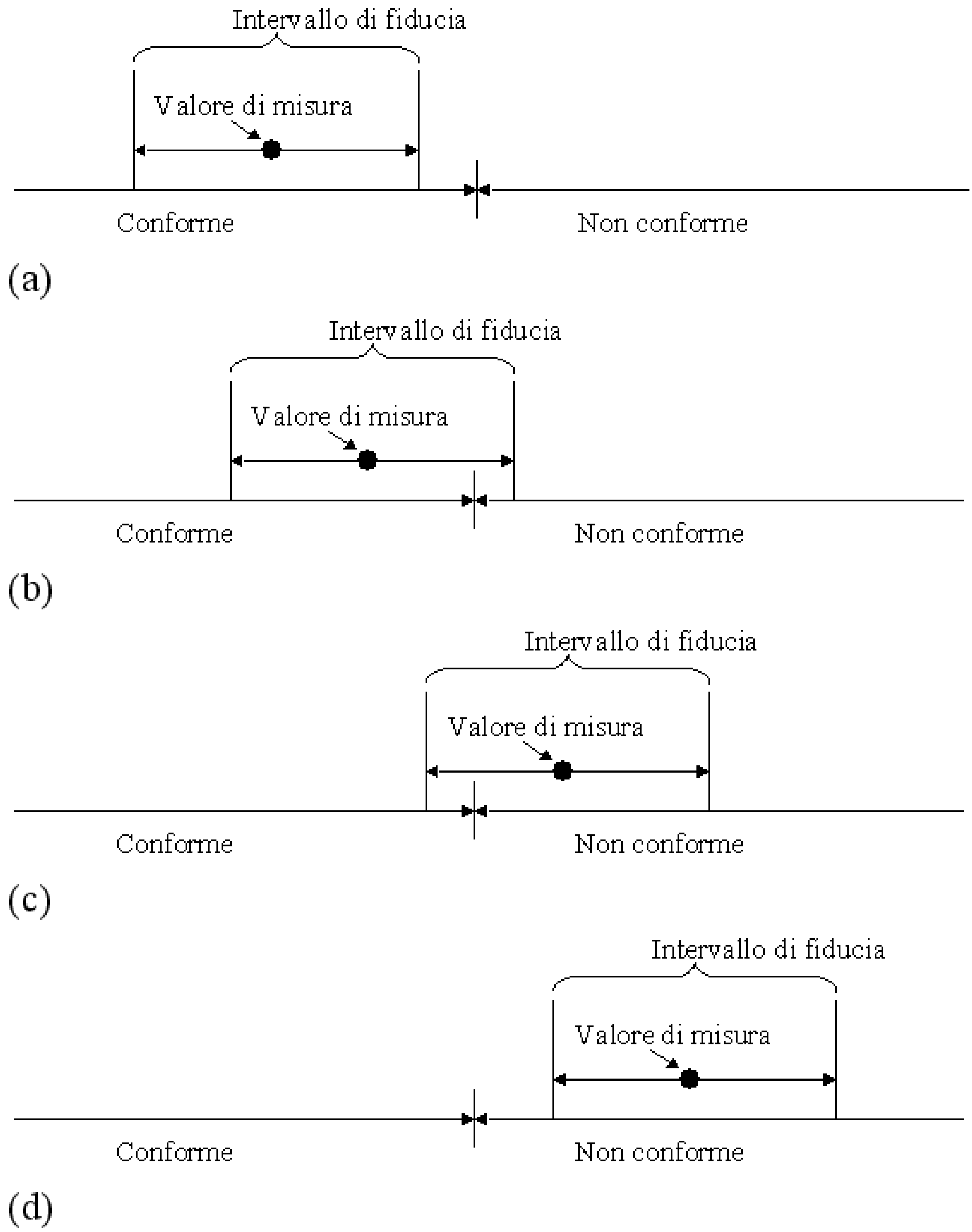

Fig. 2: verifica di conformità in presenza di incertezza di misura.

Importanza dell'incertezza di misura

Oltre a specificare la quantità di informazione acquisita con una misurazione, l'incertezza di misura è un parametro che determina la capacità di controllare processi di varia natura, ed è strettamente legata allo sviluppo tecnologico. Si osservi ad esempio che i moderni dispositivi a semiconduttore hanno dimensioni dell'ordine della decina di nanometri, e che eventuali misurazioni e verifiche su tali dimensioni devono essere effettuate con accuratezze comparabili! Inoltre, l'incertezza di misura è uno strumento di supporto alle decisioni, in quanto consente di trarre conclusioni sulla base del risultato di misura e di determinate soglie di accettazione, come avviene ad esempio per le verifiche di conformità. Si osservino in particolare i quattro casi di Fig. 2 (a)-(d), in cui sono riportati dei valori di misura, corredati degli intervalli di fiducia associati alle incertezze di misura, e una soglia di tolleranza, sotto la quale il misurando è considerato conforme e sopra la quale il misurando è considerato non conforme. Nel caso 2(a) il risultato di misura consente di concludere che il misurando è conforme, a meno del grado di fiducia corrispondente all'intervallo di fiducia. Similmente, nel caso 2(d) è possibile concludere incontrovertibilmente che il misurando è non conforme. Tuttavia, nel caso 2(b), benché il misurando sia effettivamente conforme, il risultato non consente di concludere con certezza che lo è, in quanto l'intervallo di fiducia comprende anche valori non conformi! Similmente, il caso 1(c) è quello di un misurando la cui effettiva non conformità non è dimostrabile a causa della incertezza di misura. A tale riguardo va osservato che i casi 2(b) e 2(c) si ridurrebbero rispettivamente ai casi 2(a) e 2(d) se si riducesse l'incertezza di misura (e con essa la semi-ampiezza degli intervalli di fiducia). Tuttavia, ridurre l'incertezza comporta costi aggiuntivi, dovuti all'utilizzo di strumentazione e procedure di misura più sofisticate. Si osservi che tale onere ricade su chi deve dimostrare la conformità/non conformità del misurando.

L'incertezza di misura deriva da una incompleta descrizione del contesto sperimentale, cioè da una insufficiente quantità di informazione. Le sorgenti di incertezza possono essere classificate in vari modi. Uno dei modi possibili è quello di modellare i fenomeni che danno origine ai contributi all'incertezza di misura. Un altro schema di classificazione, più operativo, consiste nel classificare le sorgenti di incertezza a seconda di come possano essere stimate e ridotte di entità, distinguendo tra sorgenti di incertezza trattabili tramite informazione acquisita a priori o a posteriori. Entrambe le tecniche di classificazione saranno descritte nelle sezioni seguenti.

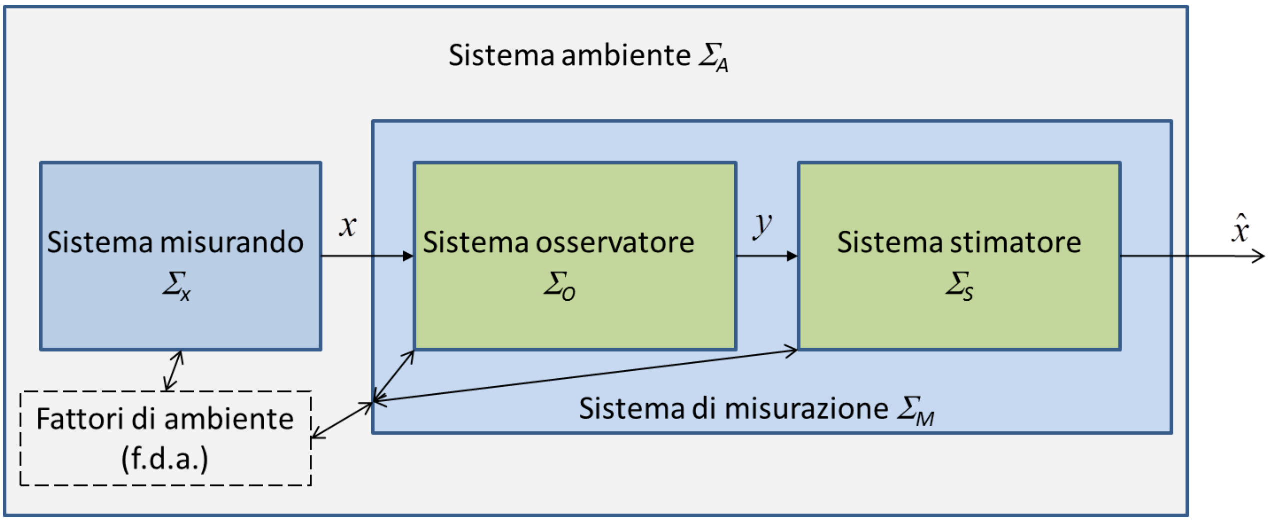

Fig. 3: Modello del contesto metrologico

Classificazione delle sorgenti di incertezza dal punto di vista della modellazione

Per quanto riguarda la classificazione delle sorgenti di incertezza che discende dalla modellazione del contesto sperimentale, possiamo assumere quest'ultimo come costituito da tra sistemi tra loro interagenti: il sistema misurando, il sistema di misurazione, e il sistema ambiente, in cui sono immersi il sistema misurando e il sistema di misurazione, come schematizzato dalla Fig. 3. La schematizzazione adottata permette di individuare tre tipologie di contributi all'incertezza di misura: l'incertezza intrinseca, l'incertezza di interazione, e l'incertezza strumentale.

Incertezza intrinseca

L'incertezza intrinseca (simbolo: $u_I(\cdot)$) è originata da una imperfetta descrizione del misurando, e delle relazioni di quest'ultimo con l'ambiente sperimentale. Il concetto di incertezza intrinseca è importante, perché è un contributo sempre presente, anche in presenza di strumentazione di misura ideale a incertezza nulla. Ne segue in particolare che non ha senso progettare o utilizzare sistemi di misurazione con incertezza di misura inferiore a quella intrinseca. Un esempio di descrizione inadeguata del misurando è il concetto di lunghezza di un oggetto. Infatti, la definizione di lunghezza perde di significato, per oggetti materiali, non appena si scende a dimensioni comparabili a quelle di atomi o molecole, in quanto tali particelle non hanno un confine definito, essendo quest'ultimo definito dalle nubi elettroniche che circondano i nuclei. Di conseguenza, non ha senso progettare un sistema per la misurazione di lunghezze su scala molecolare o inferiore! Un altro esempio di descrizione incompleta è quella dovuta all'utilizzo di modelli approssimati. Si prenda infatti in considerazione il comportamento di un resistore al variare della temperatura, che per piccole variazioni di temperatura è dato dalla semplice legge lineare

$$R(T) \cong R_0\left(1+\alpha\left(T-T_0\right)\right), \tag{1}$$

questo modello mostra come la resistenza R dipenda dalla temperatura. Di conseguenza, eseguire misurazioni in un ambiente la cui temperatura non è controllata (assumendola ad esempio costante e pari a un qualche valore convenzionale) porta ad avere un contributo di incertezza intrinseca $u_I(R)$, dovuto a variazioni del misurando stesso. Il modello (1) è inoltre approssimato, e introduce a sua volta un contributo di incertezza intrinseca. Infatti, il modello generale che lega la resistenza alla temperatura ambiente è descritto dalla ben più complessa legge di Callendar-Van Dusen, data da

$$\begin{aligned} &\frac{1}{T} \cong a + b\ln\left(R\right) + c\ln^3\left(R\right), \\ &R \cong e^{\left(\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)}, \quad \alpha = \frac{a-\frac{1}{T}}{c}, \quad \beta = \sqrt{\left(\frac{b}{3c}\right)^3 + \frac{\alpha^2}{4}}. \end{aligned} \tag{2}$$

che è a sua volta una descrizione approssimata.

Incertezza di interazione

L'incertezza di interazione (simbolo: $u_L(\cdot)$) è dovuta ad una imperfetta descrizione degli scambi energetici associati alla interazione tra lo strumento di misura e il sistema misurando. Un esempio di sorgente di incertezza di interazione è lo scambio di calore tra un termometro a mercurio e il fluido in cui il termometro è immerso, già citato in precedenza. Un esempio ben noto nel campo delle Misure Elettriche è invece l'effetto di carico nelle misurazioni di tensione, descritto di seguito

Es: effetto di carico
La misurazione di una tensione elettrica richiede l'interconnessione della sorgente di tensione allo strumento di misura. E' noto dalla teoria dei circuiti che qualunque sorgente può essere descritta da un modello equivalente, detto di Thevenin, che include un generatore di tensione ideale connesso in serie ad una resistenza equivalente R_S, come mostrato in Fig. 4(a). A sua volta, lo strumento di misura, in questo caso un Voltmetro, può essere rappresentato come uno strumento ideale, che misura la tensione ai suoi capi senza assorbire corrente, connesso in parallelo ad una resistenza equivalente R_I, che modella il consumo dello strumento, secondo lo schema di Fig. 4(b). L'interconnessione della sorgente allo strumento di misura è

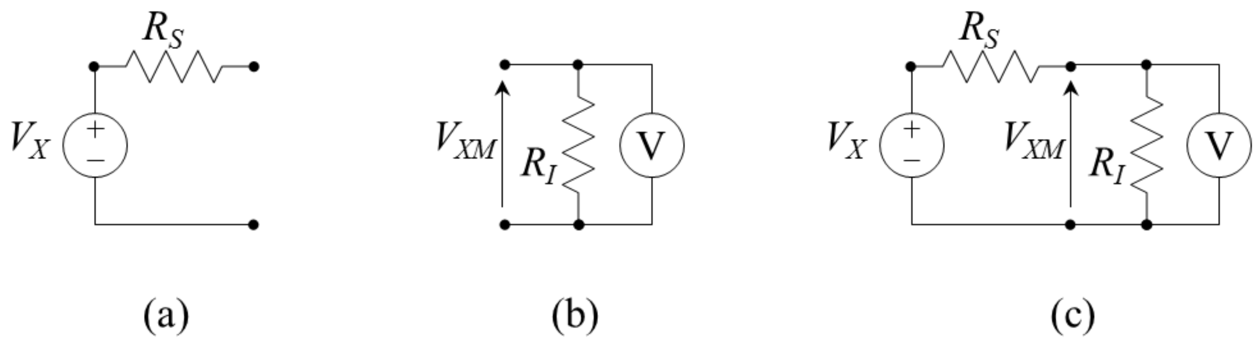

Fig. 4: circuito equivalente di una sorgente di tensione (a), di un voltmetro reale (b), e circuito di misura risultante (c).

quindi descritta dal circuito di Fig. 4(c). Analizzando tale circuito è evidente che la tensione V_{XM} misurata dallo strumento non è la tensione misuranda V_X, ma è inferiore, in accordo alla relazione

$$V_{XM} = \frac{R_I}{R_S + R_I} V_X \tag{3}$$

Incertezza strumentale

L'incertezza strumentale (simbolo: $u_S(\cdot)$) è introdotta da una imperfetta conoscenza delle interazioni tra il sistema di misura e il sistema ambiente. In altri termini, i fattori di ambiente possono influenzare le prestazioni metrologiche dello strumento, anche in modo molto significativo.

Es: Misurazione indiretta di corrente
Si vuole misurare una corrente elettrica I in modo indiretto, facendola scorrere attraverso una resistenza R, misurando la tensione ΔV ai capi della resistenza, e stimando la corrente attraverso la legge di Ohm, tramite la relazione

$$\hat{I} = \frac{\Delta \hat{V}}{R} \tag{4}$$

La resistenza campione tuttavia non è costante, e varia con la temperatura in accordo alla relazione (1). Di conseguenza, misurare la stessa corrente a temperature diverse può portare a risultati di misura diversi.

Definizione rigorosa dell'incertezza di misura

L'incertezza di misura è un parametro che descrive in modo quantitativo l'informazione associata al risultato di una misurazione, ed è relazionabile alla definizione di intervalli di fiducia. Tuttavia, l'incertezza non è attualmente definita come la semi-ampiezza di tali intervalli. La motivazione è dovuta alla progressiva evoluzione delle conoscenze, che hanno portato a una critica del concetto di errore, tipico dell'approccio classico alla Teoria della Misurazione. Infatti, la definizione di "errore" presuppone l'esistenza di un "valore vero" rispetto a cui l'errore è calcolato. Tuttavia, tale "valore vero" non è conoscibile, in quanto ottenibile soltanto in presenza di misurazioni ideali a incertezza nulla, non realizzabili in un contesto reale in quanto la misurazione prevede comunque uno scambio energetico tra il sistema misurando e il sistema di misura. In alcuni casi, il concetto stesso di "valore vero" può perdere significato, come ad esempio quello di lunghezza su scala atomica. La definizione attuale di incertezza di misura è ottenuta facendo ricorso alla Teoria delle Probabilità, che fornisce gli strumenti matematici per descrivere contesti di cui si ha una conoscenza parziale. In particolare, assumendo che per una data misurazione di un misurando x esista un “valore di riferimento” x, definito come il valore assunto dal misurando nell’istante della misurazione, si può definire la deviazione di misura $d(x)$ come la differenza tra il risultato di misura $\hat{x}$ ottenuto e il valore di riferimento, in accordo a

$$d(x) = \hat{x} - x\,. \qquad (5)$$

Inoltre, supponendo di non conoscere completamente tutte le grandezze di influenza che contribuiscono alla deviazione di misura, queste ultime possono essere considerate come variabili aleatorie. Di conseguenza, x, $\hat{x}$, e $d(x)$ sono a loro volta variabili aleatorie. L’incertezza di misura è definita come deviazione standard di $d(x)$, cioè come deviazione standard della deviazione di misura, è indicata dal simbolo $u(x)$, ed è nota anche come incertezza standard o incertezza tipo. La deviazione standard è stata selezionata per esprimere l'incertezza di misura perché descrive la dispersione dei risultati di misura intorno al valore di riferimento in modo relativamente poco dipendente dalla distribuzione statistica dei risultati stessi, al contrario di parametri analoghi come la semi-ampiezza dell'intervallo di fiducia. Quest'ultimo, noto come incertezza espansa, incertezza estesa, o limite superiore all'incertezza (simbolo: $U(x)$), può essere legato alla incertezza standard tramite un fattore di copertura k, il cui valore dipende dalla distribuzione di probabilità osservata o postulata per la deviazione di misura, secondo la relazione

$$U(x) = k \cdot u(x) \qquad (6)$$

In particolare, nel caso in cui si assuma una distribuzione Gaussiana, il fattore di copertura è pari a 3, mentre nel caso si assuma una distribuzione Uniforme, il fattore di copertura è pari a $\sqrt{3}$. Per convenzione, se non specificato altrimenti, l'incertezza di misura deve essere interpretata una incertezza standard. Infine, per quanto riguarda la strumentazione elettronica, va osservato che usualmente i manuali forniscono formule e procedure per determinare l'incertezza espansa, e che quella tipo può essere ottenuta normalizzando l'incertezza espansa al fattore di copertura.

Classificazione delle incertezze da un punto di vista operativo: incertezza di tipo A e di tipo B, incertezza composta

La relazione (5) può essere ulteriormente raffinata, supponendo che la deviazione di misura $d(x)$ possa essere immaginata come somma di due contributi, uno costante al ripetersi delle misurazioni ma ignoto, e uno che varia al ripetersi delle misurazioni, ma con media nulla (eventuali medie non nulle si considerano assorbite in c_x), come descritto da

$$d(x) = c_x + r_x\,, \qquad (7)$$

in cui r_x è il contributo che varia ripetendo le misurazioni.

Tanto r_x quanto c_x possono essere descritti da variabili aleatorie, in quanto il loro valore in una data misurazione non è noto (se lo fossero, otterremmo il valore vero e saremmo in presenza di una misurazione a incertezza nulla!). Tuttavia per le ipotesi poste, il contributo r_x all’incertezza di misura può essere stimato ricorrendo a misurazioni ripetute, cioè a partire da informazione “a posteriori”, attraverso l’operatore deviazione standard campionaria $s_R(x)$, dato da:

$$s_R(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x_n - \bar{x}\right)^2}\,, \quad \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n\,, \qquad (8)$$

dove N è il numero di misurazioni effettuate, x_n è l'n-esimo risultato di misura, e $\bar{x}$ è la media campionaria Inoltre, nel caso si effettuino misurazioni ripetute, è possibile combinare l'informazione acquisita con ciascuna misurazione, stimando il misurando proprio tramite l'operatore media campionaria. In tal modo, , si ottiene infatti un nuovo stimatore la cui deviazione standard è pari a

$$s_R(x) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{n=0}^{N-1}(x_n - \bar{x})^2}, \tag{9}$$

inferiore di un fattore $\sqrt{N}$ rispetto a (7). I contributi all'incertezza di misura stimabili e riducibili ricorrendo a misurazioni ripetute e a strumenti statistici sono detti contributi all'incertezza di tipo A, e la relativa incertezza di misura è nota come $u_A(\cdot)$.

Per contro, il contributo all'incertezza di misura dato da c_x non può essere stimato ricorrendo a misurazioni ripetute, cioè a informazione "a posteriori", in quanto il carattere sistematico lo rende invariante all'operatore media campionaria. Tali sorgenti di incertezza sono dette di tipo B, e non essendo note possono essere considerati come realizzazione di una variabile aleatoria, la cui deviazione standard $u_B(\cdot)$ è il contributo all'incertezza di tipo B. Un esempio di sorgente di incertezza di tipo B è l'effetto di carico descritto da (3). Tale contributo è infatti presente, poiché le resistenze R_S e R_I non sono note, ed è costante al ripetersi della misurazione (perché in misurazioni ripetute a breve termine i valori delle resistenze di Fig. 4 possono essere ritenuti costanti). La compensazione dei contributi di incertezza di tipo B può essere effettuata in due modi: la prima soluzione consiste nell'acquisire informazione "a priori", cioè ottenuta indipendentemente dall'aver effettuato o meno misurazioni. Nel caso dell'effetto di carico, la conoscenza "a priori" consiste nella conoscenza del modello matematico (3), e nella stima delle resistenze R_S e R_I attraverso misurazioni preliminari. In tal caso, si potrebbe compensare l'effetto di carico, ottenendo lo stimatore $\hat{V}_X$

dato da

$$\hat{V}_X = \frac{\hat{R}_S + \hat{R}_I}{\hat{R}_I} V_{XM}, \tag{10}$$

caratterizzato da una incertezza residua dovuta alla conoscenza imperfetta dei valori delle resistenze.

Un approccio alternativo è il cosiddetto ampliamento del contesto, che tende a trasformare i contributi all'incertezza di tipo B in contributi di tipo A. Nell'esempio dell'effetto di carico, questo potrebbe essere ottenuto ripetendo le misurazioni utilizzando ogni volta uno strumento di misura diverso, rendendo variabile R_I e trasformando l'effetto di carico in un contributo di tipo A.

I contributi di incertezza di tipo A e B possono essere combinati per fornire un unico valore di incertezza, osservando che, per un dato misurando x, le variabili aleatorie r_x ed c_x possono essere considerate tra loro indipendenti, in quanto descrivono fenomeni diversi. Di conseguenza, la varianza della somma (6) di r_x ed c_x è quella della somma di due variabili aleatorie incorrelate, pari alla somma delle varianze di r_x e di c_x., rispettivamente pari a $u_A(x)^2$ e a $u_B(x)^2$. L'incertezza di misura complessiva, detta $u_C(x)$ sarà quindi la radice quadrata della varianza così ottenuta, data da

$$u_C(x) = \sqrt{u_A(x)^2 + u_B(x)^2} \tag{11}$$

Osservazione: nella strumentazione elettronica, l'incertezza di misura è prevalentemente di tipo B.

Simboli:

incertezza standard: $u(\cdot)$

incertezza espansa: $U(\cdot)$

incertezza obiettivo: $u_{UB}(\cdot)$

incertezza intrinseca: $u_I(\cdot)$

incertezza di interazione: $u_L(\cdot)$

incertezza strumentale: $u_S(\cdot)$

incertezza di tipo A: $u_A(\cdot)$

incertezza di tipo B: $u_B(\cdot)$

incertezza composta: $u_C\cdot(\cdot)$